Combinação linear

Professor: Gabriel Miranda

Resumo

Definição

Sejam os vetores $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ do espaço vetorial $\boldsymbol{V}$ e os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. **Qualquer** vetor $\boldsymbol{v}$ da forma:

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v_n}$$

É uma combinação linear dos vetores $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$.

Observação: esse conceito é utilizado desde o Ensino Médio na aplicação de Matrizes e Sistemas lineares determinados, quando é dito que uma linha é a combinação da outra.

Ex. 1: Escrever $\boldsymbol{v} = (-4, -18{,}7)$ como combinação linear de $\boldsymbol{v_1} = (1, -3{,}2)$ e $\boldsymbol{v_2} = (2{,}4, -1)$

Resolução

$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2}$

$(-4, -18{,}7) = \alpha_1(1, -3{,}2) + \alpha_2(2{,}4, -1)$

$(-4, -18{,}7) = (\alpha_1, -3\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, 4\alpha_2, -\alpha_2)$

$(-4, -18{,}7) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, -3\alpha_1 + 4\alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2)$

É obtido o seguinte sistema linear a partir do vetor acima:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = -4 \\ -3\alpha_1 + 4\alpha_2 = -18 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 7 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, conclui-se que $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = -3$ e que o vetor $\boldsymbol{v}$ pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v_1} - 3\boldsymbol{v_2} = 2 \cdot (1, -3{,}2) - 3 \cdot (2{,}4, -1)$$

Subespaços Gerados

Seja $\boldsymbol{V}$ espaço vetorial gerado e $A = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\} \subset \boldsymbol{V}; A \neq \emptyset$

$S = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} | \boldsymbol{v} = a_1 \boldsymbol{v_1} + a_2 \boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n \boldsymbol{v_n}; a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$ é **subespaço** de $\boldsymbol{V}$.

Ou seja, um conjunto de vetores que são combinações lineares de vetores contidos em $\boldsymbol{V}$, é subespaço de $\boldsymbol{V}$.

I. O subespaço $\boldsymbol{S}$ diz-se **gerado** pelos vetores de A e representa-se por: $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}]$ (sempre entre colchetes) ou $\boldsymbol{S} = G(A)$. Sendo o conjunto de vetores $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\}$ chamados **vetores geradores** e A de **conjunto gerador**.

II. Se $A = \emptyset$, representa-se por $[\emptyset] = \{0\}$.

III. $A \subset G(A)$

IV. Todo $A \subset \boldsymbol{V}$ gera um subespaço de $\boldsymbol{V}$. Se $G(A) = \boldsymbol{V}$; A é gerador de $\boldsymbol{V}$.

Ex.1: Seja $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$. Determinar o subespaço gerado pelo vetor $\boldsymbol{v_1} = (1,2,3)$.

Resolução

$[\boldsymbol{v_1}] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} | (x, y, z) = \alpha \cdot (1,2,3), \alpha \in \mathbb{R}\}$

$(x, y, z) = \alpha \cdot (1,2,3)$

$(x, y, z) = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \end{cases}$$

$[\boldsymbol{v_1}] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} | (x, y, z) = (x, 2x, 3x)\}$

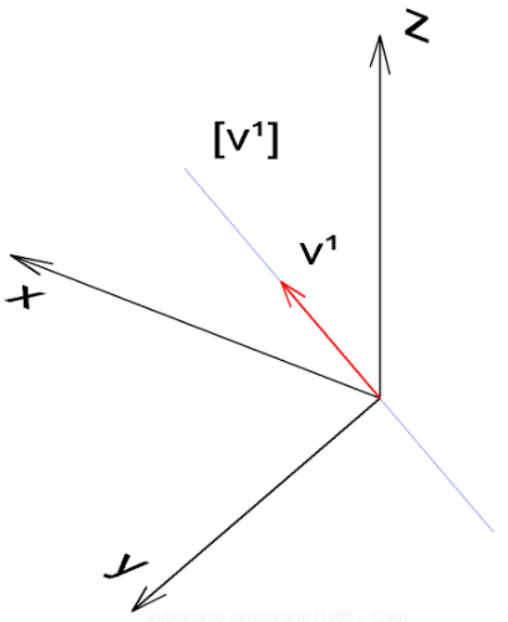

Figura 1. Representação gráfica do subespaço gerado por v_1

O vetor v_1 dá a direção do subespaço gerado por ele, sendo todos os vetores do espaço gerado por ele pertencentes à reta azul mostrada na figura, apenas alongando ou encurtando o tamanho do vetor. Sendo assim, os vetores $(2,4,6)$ e $(3,6,9)$ são vetores pertencentes a esse subespaço, pois respeitam a regra demonstrada anteriormente $(x, y, z) = (x, 2x, 3x)$.